

専門科目（午前）

26 大修

情報工学

時間 9:30 ~ 12:30

通信情報工学専攻・計算工学専攻

注 意 事 項

1. 各解答用紙に受験番号を記入せよ。
 2. 次の7題の中から4題を選択して解答せよ。5題以上解答した場合はすべて無効とする。
 3. 解答は1題ごとに別々の解答用紙に、問題番号を明記した上で記入せよ。必要であれば、解答用紙の裏面に記入してよいが、解答用紙の表面にその旨を明記すること。
 4. 1枚の解答用紙に2題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある。
 5. 1題の解答を2枚以上の解答用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある。
 6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない。
-

1. 実数 a, b ($a < b$) に対して, $[a, b], [a, +\infty)$ を

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, +\infty) &= \{x \mid a \leq x\} \end{aligned}$$

と定め, これらを閉区間と呼ぶ. 特に, $[a, b]$ を有界閉区間と呼ぶ.

$f(x)$ を閉区間 I 上の関数とする. I 上の関数列 $\{f_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ が I 上で $f(x)$ に各点収束するとは, 任意の $x \in I$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ を満たすことである. 一方, I 上の関数列 $\{f_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ が I 上で $f(x)$ に一様収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

を満たすことである. ここで, $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ とは, 集合

$$\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\}$$

の上限を表す. 以下の問に答えよ.

1) 関数列 $\{f_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ が I 上で関数 $f(x)$ に一様収束するということが, 以下の文とが同値になるように, 「任意の」もしくは「ある」のいずれかを用いて空欄 a)~d) を埋めよ.

a) $\varepsilon > 0$ に対して, b) n_0 が存在して, $n_0 \leq n$
を満たす c) n に対して, d) $x \in I$ において,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

2) 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 $g_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を $g_n(x) = x^{n-1}$ とする. 関数列 $\{g_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ に関する以下の問に答えよ.

- この関数列は, 閉区間 $[0, 1]$ 上で, ある関数 $g(x)$ に各点収束する. この $g(x)$ を示せ.
- この関数列は, 閉区間 $[0, 1]$ 上で, $g(x)$ に一様収束するであろうか. 一様収束するか否かを答え, その理由を述べよ.

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

- 3) n を 1 以上の整数とする. 閉区間 $[0, +\infty)$ 上の関数 $h_n(x)$ を以下のよ
うに定める.

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}x & (0 \leq x < n) \\ \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}x & (n \leq x < 2n) \\ 0 & (2n \leq x) \end{cases}$$

関数列 $\{h_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$ に関する以下の問に答えよ.

- a) この関数列は, 閉区間 $[0, +\infty)$ 上で, ある関数 $h(x)$ に各点収束す
る. この $h(x)$ を示せ.
- b) この関数列は, 閉区間 $[0, +\infty)$ 上で, $h(x)$ に一様収束するであらう
か. 一様収束するか否かを答え, その理由を述べよ.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ の値を求めよ. ただし, $\int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ は広義
積分である. すなわち,

$$\int_0^{+\infty} h_n(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M h_n(x) dx.$$

- 4) J を有界閉区間 $[0, 1]$ とする. J 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n(x) \mid n =$
 $1, 2, \dots\}$ が J 上の関数 $f(x)$ に一様収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

であることを示せ.

- 5) 閉区間 $[0, +\infty)$ 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n(x) \mid n = 1, 2, \dots\}$
が $[0, +\infty)$ 上の関数 $f(x)$ に一様収束するとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

であるという性質が成り立つならば, そのことを示せ. そうでなけれ
ば, 反例をあげよ.

ただし, $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ および $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ は広義積分である.

2. 関数 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ を $\mathcal{L}[x(t)]$ とし, $X(s)$ の逆ラプラス変換を $\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ と表す. このとき, 以下の間に答えよ.

1) $x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ のとき, $\mathcal{L}[x'(t)]$ を $\mathcal{L}[x(t)]$ を用いて表せ.

2) $f(t) = t \sin at, g(t) = t \cos at$ (ただし $a \neq 0$) のとき, $\mathcal{L}[f'(t)]$ を $\mathcal{L}[g(t)]$ を用いて表せ.

3) 1) と 2) の結果を用いて, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ および $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ を求めよ.

4) $H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$ のとき, $H(s)$ を $F(s)$ で表し, これを利用して $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ を求めよ.

5) $y''(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t)$ である. 初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ のとき, 微分方程式

$$y''(t) + y(t) = \sin t$$

を, ラプラス変換を用いて解け.

3. 頂点や辺の数が有限で、辺に向きや重みがなく、多重辺や自己ループを含まない連結グラフについて考える。頂点の数が n の完全グラフを K_n とする。以下の間に答えよ。

グラフを平面上に描くことを考える。どの2辺もその端点以外では交わらないように平面上に描いたグラフを平面グラフといい、平面グラフとして描くことができるグラフを平面的グラフという。図 3.1 は K_2 の平面グラフ G_2 、図 3.2 は K_3 の平面グラフ G_3 、図 3.3 は K_4 の平面グラフ G_4 である。辺で区切られた領域を面という。無限遠点を含む領域も面とする。平面グラフ G の頂点の集合を $V(G)$ 、辺の集合を $E(G)$ 、面の集合を $F(G)$ とし、それぞれの大きさを $|V(G)|$ 、 $|E(G)|$ 、 $|F(G)|$ とする。例えば図 3.1 の G_2 においては $|V(G_2)| = 2$ 、 $|E(G_2)| = 1$ 、 $|F(G_2)| = 1$ であり、図 3.2 の G_3 においては、3 辺で囲まれた内側とその外側に面があるため、 $|V(G_3)| = 3$ 、 $|E(G_3)| = 3$ 、 $|F(G_3)| = 2$ である。



図 3.1 K_2 の平面グラフ G_2

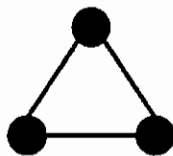


図 3.2 K_3 の平面グラフ G_3

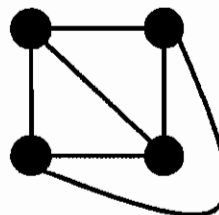


図 3.3 K_4 の平面グラフ G_4

1) 以下は $|V(G)| \geq 3$ である平面グラフ G において、 $|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$ が成立することの証明である。空欄 \boxed{A} 、 \boxed{B} 、 \boxed{C} 、 \boxed{D} を埋めよ。

平面グラフ G において、オイラーの公式 $|F(G)| - |E(G)| + |V(G)| = \boxed{A}$ が成立する。

面 f とそれに接する辺 e のペア (f, e) の個数 p について次の2つのことが言える。まず、同じ面に両側で接する辺も2つの面に接するとみなすと、各辺は2つの面に接するので、全ての辺についての合計 $2 \cdot \boxed{B}$ は p 以上である。次に、各面には少なくとも3つの辺が接するので、 $3 \cdot \boxed{C}$ は p 以下である。この2つから $3 \cdot \boxed{C} \leq 2 \cdot \boxed{B}$ となる。

以上より $3 \cdot \boxed{C} = 3 \cdot (|E(G)| - \boxed{D} + \boxed{A}) \leq 2 \cdot \boxed{B}$ であり、 $|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$ となる。

2) K_5 は平面的グラフではないことを証明せよ。

3) 頂点 v につながる辺の数を v の次数といい、 $deg(v)$ で表す。任意のグラフにおいて、全ての頂点の次数の和は、辺の数の2倍に等しいことを証明せよ。

4) $|V(G)| \geq 3$ である平面グラフ G において、次数が5以下の頂点が存在することを証明せよ。

4. 図 4.1 に示す回路について以下の問に答えよ。ただし、すべての MOS トランジスタの電圧・電流特性が

$$I_D = \begin{cases} 0 & (V_{GS} - V_T \leq 0, \quad \text{遮断領域}) \\ 2K(V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2})V_{DS} & (V_{GS} - V_T > V_{DS} \geq 0, \quad \text{非飽和領域}) \\ K(V_{GS} - V_T)^2 & (V_{DS} \geq V_{GS} - V_T > 0, \quad \text{飽和領域}) \end{cases}$$

であるとする。ここで、 I_D はドレイン電流、 V_{GS} はゲート・ソース間電圧、 V_{DS} はドレイン・ソース間電圧、 K は伝達コンダクタンスパラメータ、 V_T はしきい電圧であり、MOS トランジスタに付随する寄生容量は無視できるものとする。なお、括弧内には MOS トランジスタの動作領域の定義とその名称が記載されている。また、電源電圧 V_{DD} を 3.0 V、抵抗 R_L を 50 k Ω 、抵抗 R_1 を 100 k Ω 、容量 C_1 を 0.10 pF、伝達コンダクタンスパラメータ K を 50 $\mu\text{A}/\text{V}^2$ 、しきい電圧 V_T を 0.50 V とする。必要ならば $\sqrt{5} = 2.2$ 、 $\ln 6 = 1.8$ という近似を用いよ。

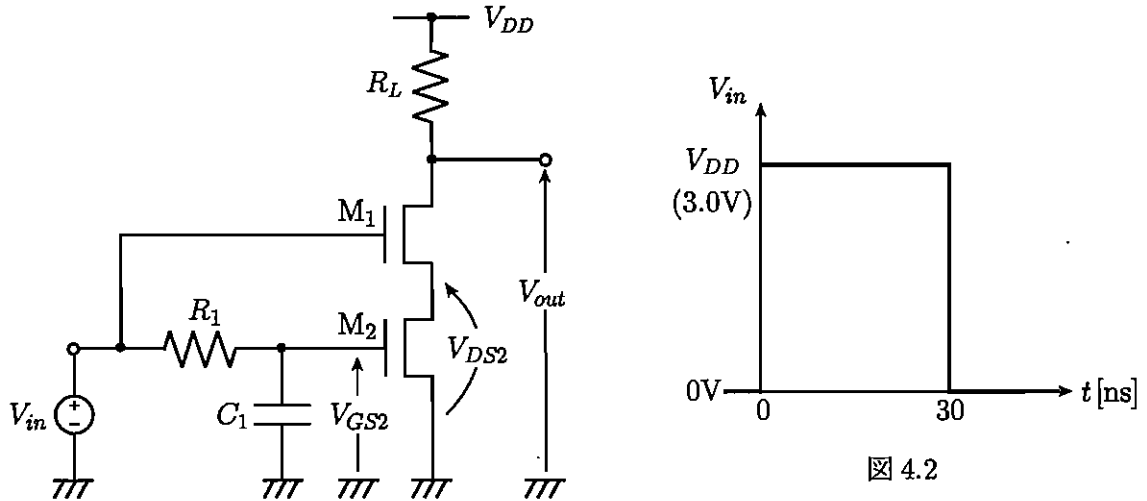


図 4.1

図 4.2

図 4.1 の回路において、 $t = 0$ ns のとき、容量 C_1 に蓄えられている電荷を 0 C とする。また、図 4.2 に示す通り、 V_{in} は $t = 0$ ns において 0 V から V_{DD} へと変化し、さらに V_{DD} から 0 V へ戻る、パルス幅 30 ns の方形パルスである。ただし、上述の通り、 V_{DD} は 3.0 V であり、図 4.1 の回路では抵抗 R_L を流れる電流と MOS トランジスタ M_1 のドレイン電流、MOS トランジスタ M_2 のドレイン電流は常に等しい。

- 1) $t = 0$ ns において V_{in} が 0 V から V_{DD} へと変化した直後の M_2 の動作領域を答えよ。
- 2) $t = 0$ ns において V_{in} が 0 V から V_{DD} へと変化した直後から時間が経過し、 M_2 のゲート・ソース間電圧 V_{GS2} が 0 V から増加して、ある時刻で M_2 の動作領域が切り替わった。動作領域が切り替わった瞬間の V_{GS2} を求めよ。
- 3) V_{GS2} が 2) で求めた値を超えた直後、 M_1 と M_2 は飽和領域で動作する。 V_{GS2} が 2) で求めた値から増加しても M_1 が飽和領域で動作するための V_{GS2} の条件を V_T 、 R_L 、 K を用いて表せ。ただし、 M_2 は飽和領域で動作しているとしてよい。

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

- 4) 飽和領域で動作している2個のMOSトランジスタにおいて、伝達コンダクタンスパラメータとしきい電圧、ドレイン電流のそれぞれが等しい場合、ゲート・ソース間電圧も等しくなる。このことに注意し、3)と同様に、 V_{GS2} が2)で求めた値から増加しても M_2 が飽和領域で動作するための V_{GS2} の条件を V_T 、 V_{DD} を用いて表せ。ただし、 M_1 は飽和領域で動作しているとしてよい。
- 5) V_{GS2} が2)で求めた値から増加し、飽和領域で動作していた M_1 か M_2 のいずれかの動作領域が先に切り替わった。切り替わった瞬間の V_{GS2} を求めよ。
- 6) V_{GS2} が5)で求めた値からさらに増加し、出力電圧 V_{out} が0.50 Vとなった。このときの M_2 のドレイン・ソース間電圧 V_{DS2} を求めよ。
- 7) 出力電圧 V_{out} が0.50 Vとなったときの V_{GS2} を求めよ。
- 8) V_{out} が0.50 V以下に保たれている時間を求めよ。ただし、7)で求めた V_{GS2} についてはその小数第2位を四捨五入して近似した値を用いよ。

5. 入力 X および出力 Y からなる無記憶通信路を考える. 入力アルファベットと出力アルファベットをそれぞれ $\{a_1, \dots, a_M\}$ と $\{b_1, \dots, b_N\}$ で表す. ただし, M と N は 2 以上の整数とする. 入力 X が a_i である条件のもとで出力 Y が b_j となる確率を $P(Y = b_j | X = a_i)$ とする. 通信路行列 W を次式により定義する.

$$W = \begin{pmatrix} P(Y = b_1 | X = a_1) & \cdots & P(Y = b_N | X = a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(Y = b_1 | X = a_M) & \cdots & P(Y = b_N | X = a_M) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

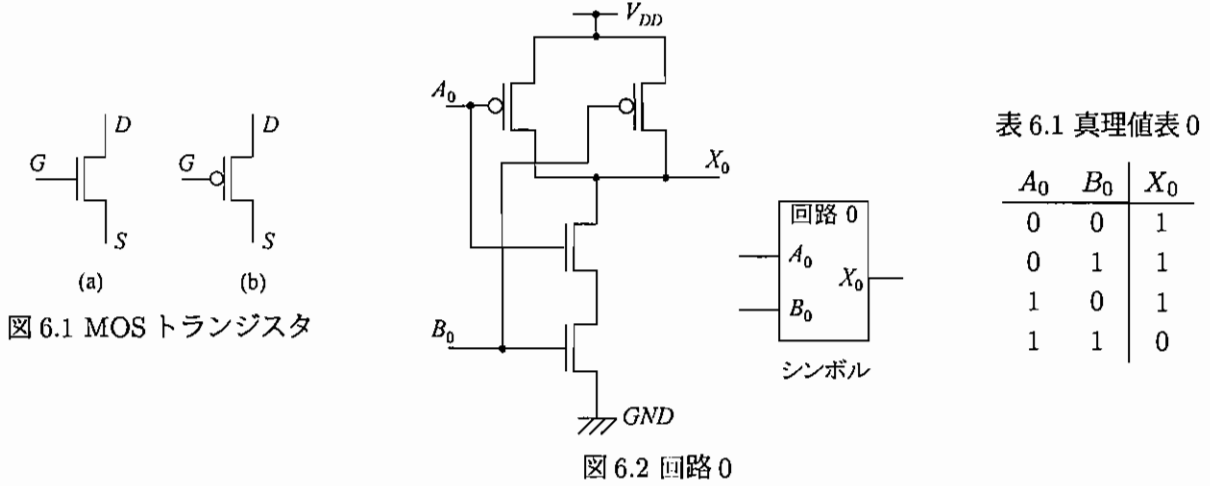
エントロピーなどの情報量の単位はビットとする. 以下の間に答えよ.

- 1) 入力 X のエントロピー $H(X)$ を入力分布 $P(X = a_i)$ ($i = 1, \dots, M$) を用いて表せ.
- 2) 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を入力分布 $P(X = a_i)$ ($i = 1, \dots, M$) と条件付き確率 $P(Y = b_j | X = a_i)$ ($i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$) を用いて表せ.
- 3) 通信路行列が次の W' で与えられるときの条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を求めよ. ただし, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ かつ $\alpha + \beta + \gamma = 1$ とする.

$$W' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

- 4) W' のように, 式 (5.1) で表される通信路行列 W の各行が 1 行目の要素を並べ替えた行となっている場合を考える. このときの条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を求め, $H(Y|X)$ が入力分布 $P(X = a_i)$ ($i = 1, \dots, M$) に依存しないことを証明せよ.
- 5) 式 (5.1) で表される通信路行列 W において $\sum_{i=1}^M P(Y = b_j | X = a_i)$ が $j = 1, \dots, N$ によらず一定であり, さらに各行が 1 行目の要素を並べ替えた行である場合を考える.
 - a) 出力分布 $P(Y = b_j)$ ($j = 1, \dots, N$) が一様分布となる入力分布 $P(X = a_i)$ ($i = 1, \dots, M$) を 1 つ求めよ. また, その入力分布が与えられたときに出力分布が一様となることを示せ.
 - b) アルファベット $\{b_1, \dots, b_N\}$ 上で定義される確率変数 Z を考える. Z の分布が一様であるとき, Z のエントロピー $H(Z)$ は最大となることを証明せよ.
 - c) 通信路容量 C を求めよ. ただし, 導出過程を書き, 導出には a) と b) の結果を利用せよ.

6. 図 6.1(a) で表す MOS トランジスタは、ゲート (G) が論理値 1 に対応する高電位の時にドレイン (D) とソース (S) 間が導通状態 (同一論理値) となり、それ以外は非導通状態となる。また、図 6.1(b) では、 G が論理値 0 に対応する低電位の時に D と S 間は導通状態となり、それ以外は非導通状態となる。この特性により、図 6.2 に示す回路 0 の入力 A_0, B_0 と出力 X_0 の真理値表 0 は表 6.1 となる。



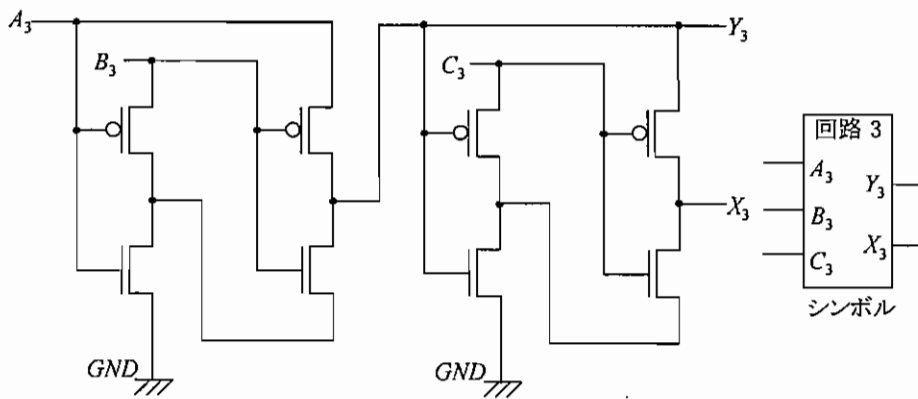
1) 回路 0 と同数の MOS トランジスタを用いて表 6.2 に示す真理値表 1 となる回路 1 の回路図を示せ。

表 6.2 真理値表 1

A_1	B_1	X_1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2) A_2, B_2, C_2, D_2 を入力, $X_2 = \overline{A_2 \vee (B_2 \wedge C_2 \wedge D_2)}$ を出力とする 8 個の MOS トランジスタを用いた回路 2 の回路図を示せ。

3) 図 6.3 の回路 3 の入力 A_3, B_3, C_3 に対する出力 X_3 の真理値表を示せ。



(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

- 4) A_4, B_4, C_4, D_4 を入力, X_4 を出力とする回路4を図6.4に示す. 回路3の A_3 を回路4の A_4 につなぎ, 同様に B_3 と B_4 , C_3 と C_4 , Y_3 と D_4 をつないだときの X_4 を, A_3, B_3, C_3 による最も簡略化された積和形の論理式で表せ.

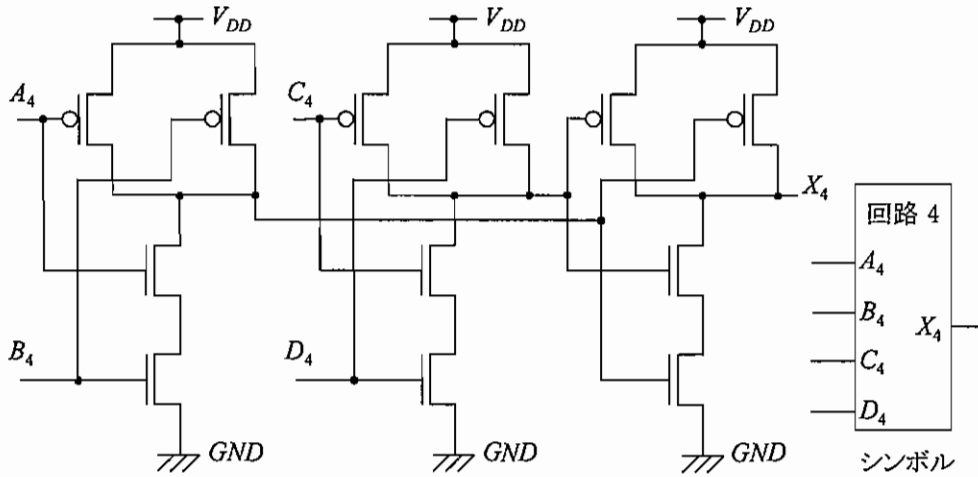


図 6.4 回路 4

- 5) A_5, B_5, C_5 を入力, X_5, Y_5 を出力とする図6.5の回路5において, (i) $A_5 = 1, B_5 = 0, C_5 = 1$ とした後の出力 X_5 の論理値, (ii) その後 $A_5 = 0, B_5 = 0, C_5 = 0$ とした後の出力 X_5 の論理値, (iii) さらにその後 $A_5 = 0, B_5 = 1, C_5 = 1$ とした後の出力 X_5 の論理値を示せ.

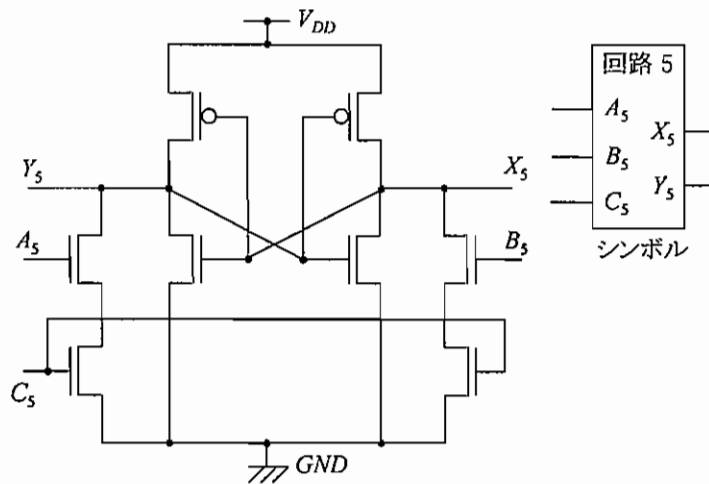


図 6.5 回路 5

- 6) A_6, C_6 を入力, X_6 を出力とし, 回路5を2つ含んだマスタースレーブ構成のポジティブエッジトリガー型Dフリップフロップである回路6を考える. ここで, 入力 C_6 にクロックを与えるものとする. 回路5のシンボルとできるだけ少ないMOSトランジスタを用いて回路6を示せ.
- 7) A_7, B_7, C_7 を入力, X_7 を出力とする回路7を考える. 入力 C_7 に与えるクロックに同期して1ビット毎に下位ビットから入力される2系列のシリアルデータ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} と b_0, b_1, \dots, b_{n-1} を入力 A_7 と B_7 に与え, 出力 X_7 からシリアルデータ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} を出力する. ここで, 2つの符号無し2進数 $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ と $b_{n-1} \dots b_1 b_0$ を算術加算した結果が $x_{n-1} \dots x_1 x_0$ である. ただし, オーバーフローは起きないものとする. 回路0から回路6の中で必要な回路のシンボルのみを用いて回路7を示せ.

7. $(5+3)*2$ のように演算子を被演算子の中間に置く中置形式で書いた算術式を文字列として受け取り、その算術式の値を計算する手続きを Scheme で実現することを考える。この手続きの名前を `calc` とすると、たとえば、`(calc "(5+3)*2")` を評価した値は 16 となる。ここで、引数として受け取る文字列は、それぞれ、加算、乗算の二項演算を表わす記号 '+', '*', 開き括弧と閉じ括弧、および数字のみからなるものとする。正負の符号を表わす単項演算子は扱わない。さらに、被演算子として利用できる数は一桁の数に限られるものとし、これ以外の文字を含む文字列や算術式でない文字列が引数として与えられた場合はエラーを起すものとする。また、`"1"` のように数字一文字のみからなる文字列は算術式とする。手続き `calc` を図 7.1 のように実装した。これについて以下の間に答えよ。

- 1) a) 局所手続き `new-char-stream` が返す値の型を述べよ。
b) 局所手続き `new-char-stream` の機能を説明せよ。
- 2) a) `(calc "2+3*")` を評価するとエラーが起った。このエラーは図 7.1 の何行目で起るか述べよ。
b) `(calc "2+3(")` を評価した結果はどうなるか述べよ。
c) `(calc "2+3(")` の評価における問題点を指摘し、解決策について述べよ。
- 3) 2) c) の問題を解決したという前提で `calc` によって値が計算できる文字列の文法を文脈自由文法で記述せよ。ただし、非終端記号としては、図 7.1 の局所手続き名である `expr`, `term`, `factor`, および開始記号として `s` を使うこと。
- 4) `calc` を二桁以上の正の整数も扱えるように拡張することを考える。このために図 7.1 の 32 行目の `digit-value` を `integer-value` に置き換え、`integer-value` を以下のように定義した。この `integer-value` の定義は `digit-value` の定義の直後に挿入するものとする。空欄を一つの式で埋めて手続きを完成せよ。なお、整数の表記には文字列 `"001"` のように先頭に冗長なゼロを含む表記も許すものとする。

```
(define (integer-value c)
  (define (loop v)
    (let ((d (cs #f)))
      (cond
        [ ]
        (#t v))))
  (loop (digit-value c)))
```

- 5) 減算も扱えるように `calc` を拡張するために、図 7.1 の 13 行目と 14 行目の間に

```
((eqv? c #\-) (cs #t) (~ v (expr)))
```

を挿入した。また、引数として与える文字列に減算の二項演算を表わす記号 '-' も使えるものとする。この拡張をほどこした `calc` は、通常の算術式の計算とは異なる結果を返す。どのように結果が違うかを具体例をあげて説明し、その理由を述べよ。

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

```
1 (define (calc str)
2
3   (define (new-char-stream str)
4     (let ((cl (string->list str)))
5       (lambda (sw)
6         (if (null? cl) #f
7             (let ((c (car cl))) (if sw (set! cl (cdr cl))) c))))))
8
9   (let ((cs (new-char-stream str)))
10
11     (define (expr)
12       (let* ((v (term)) (c (cs #f)))
13         (cond ((eqv? c #\+) (cs #t) (+ v (expr)))
14               (#t v))))
15
16     (define (term)
17       (let* ((v (factor)) (c (cs #f)))
18         (cond ((eqv? c #\*) (cs #t) (* v (term)))
19               (#t v))))
20
21     (define (factor)
22
23       (define (digit? c)
24         (if c
25             (let ((cx (char->integer c)))
26               (and (<= (char->integer #\0) cx) (<= cx (char->integer #\9))))
27             #f))
28
29       (define (digit-value c) (- (char->integer c) (char->integer #\0)))
30
31       (let ((c (cs #t)) (v 0))
32         (cond ((digit? c) (digit-value c))
33               ((eqv? c #\()
34                (set! v (expr))
35                (if (eqv? (cs #t) #\)) v (error "missing ")"))
36               (#t (error "illegal operand"))))
37
38     (expr)))
```

図 7.1

手続きの補足説明

- `string->list`: 文字列を文字のリストに分解する。ただし、`#\1` は文字 '1' を表わす。
(例) `(string->list "1+2")` \Rightarrow `(#\1 #\+ #\2)`
- `char->integer`: 文字をその文字コードに変換する。数字の文字コードは連続しており、数字の大小関係とその文字コードの大小関係は一致すると仮定してよい。
(例) `(char->integer #\5)` \Rightarrow 53, `(char->integer #\6)` \Rightarrow 54
- `error`: エラーを引き起し、引数で渡された文字列を表示する。