

専門科目（午前）

24 大修

情報工学

時間 9:30 ~ 12:30

集積システム専攻・計算工学専攻

注 意 事 項

1. 各解答用紙に受験番号を記入せよ。
  2. 次の 7 題の中から 4 題を選択して解答せよ。5 題以上解答した場合はすべて無効とする。
  3. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙に、問題番号を明記した上で記入せよ。必要であれば、解答用紙の裏面に記入してよいが、解答用紙の表面にその旨を明記すること。
  4. 1 枚の解答用紙に 2 題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある。
  5. 1 題の解答を 2 枚以上の解答用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある。
  6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない。
-

1. 集合  $V$  の任意の要素  $u, v$  および任意の実数  $\alpha$  について,  $u$  と  $v$  の和  $u+v$ , および  $u$  の  $\alpha$  倍  $\alpha u$  が定義されているとする.  $V$  が実線型空間であるための条件の中に

条件 I  $\alpha u \in V$ ,

条件 II  $u+v \in V$

がある. 条件 I と II は以下の集合  $V_1$  から  $V_{10}$  が実線型空間であるための必要十分条件になっている. なお集合  $V_1$  から  $V_8$  では, 集合の要素  $u$  と  $v$  の和は  $u$  と  $v$  の成分毎の和と定義し, 実数  $\alpha$  による要素  $u$  の  $\alpha$  倍は  $u$  の各々の成分を  $\alpha$  倍したものとす. 集合  $V_9$  と  $V_{10}$  では, 和と  $\alpha$  倍をそれぞれ多項式同士の和と実数  $\alpha$  による多項式の  $\alpha$  倍によって定義する.

以下の集合  $V_1$  から  $V_{10}$  のそれぞれについて, その集合が実線型空間であるか否か述べよ. 実線型空間である場合にはその基底を一つ挙げよ. そうではない場合には反例を挙げよ.

例えば, 条件 I と II の両方を満たす実線型空間  $\{(a, b) \mid a, b \text{ は実数}\}$  については基底として  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  を挙げ, 条件 I を満たさない集合  $\{(a, b) \mid a, b \text{ は非負の実数}\}$  については  $\alpha = -1$  と  $u = (1, 1)$  が条件 I を満たさないことを述べればよい.

- 1)  $V_1 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数}\}$ .
- 2)  $V_2 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$ .
- 3)  $V_3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a + b = b + c = 0\}$ .
- 4)  $V_4 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } a + b = b + c = 1\}$ .
- 5)  $V_5 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列}\}$ .
- 6)  $V_6 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列であり, かつ } M \text{ のトレースは } 0\}$ .
- 7)  $V_7 = \{M \mid M \text{ は } 2 \times 2 \text{ 実行列であり, かつ } M \text{ の行列式は } 0\}$ .
- 8)

$$V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \text{ は実数であり, かつ } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}.$$

- 9)  $V_9 = \{f(x) \mid f(x) \text{ は次数が } 2 \text{ 以下の実多項式であり, かつ } f(1) = 0\}$ .
- 10)  $V_{10} = \{f(x) \mid f(x) \text{ は次数が } 2 \text{ 以下の実多項式であり, かつ } f(1) = 1\}$ .

2. 1) 1次元の確率分布に独立に従う標本  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 0$  を考える.
- a) 標本  $x_1, x_2, x_3$  の平均および分散を求めよ.
- b)  $y_i = 3x_i + 2, i = 1, 2, 3$  とおく. 標本  $y_1, y_2, y_3$  の平均および分散を求めよ.
- 2) 確率変数  $X$  が  $[-1, 4]$  上の一様分布に従うとき, 確率変数  $Y = 3X + 2$  の期待値, 分散および確率密度関数を求めよ.
- 3) 2次元の同時確率分布に独立に従う標本  $t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  を考える.
- a) 標本  $t_1, t_2, t_3$  の平均および分散共分散行列を求めよ.
- b)  $u_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} t_i + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$  とおく. 標本  $u_1, u_2, u_3$  の平均および分散共分散行列を求めよ.
- 4) 確率変数  $T$  が 2次元標準正規分布に従うとき, 確率変数

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

の期待値, 分散共分散行列および同時確率密度関数を求めよ.

3. 開始状態も含めて5状態の決定性有限オートマトンに関する8つの命題がある.

命題1 長さ3の入力列を1つ以上受理した場合, 受理言語は無限集合である.

命題2 長さ4の入力列を1つ以上受理した場合, 受理言語は無限集合である.

命題3 長さ5の入力列を1つ以上受理した場合, 受理言語は無限集合である.

命題4 長さ3以下の入力列を全く受理しない場合, 受理言語は空集合である.

命題5 長さ4以下の入力列を全く受理しない場合, 受理言語は空集合である.

命題6 長さ5以下の入力列を全く受理しない場合, 受理言語は空集合である.

命題7 長さ2の入力列を1つ以上受理し, 長さ3以上6以下の入力列を全く受理しない場合, 受理言語は有限集合である.

命題8 長さ2の入力列を1つ以上受理し, 長さ3以上9以下の入力列を全く受理しない場合, 受理言語は有限集合である.

命題1から命題8の真偽を判定し, 判定結果を述べよ. 真の場合は理由を示せ. 偽の場合は反例となる状態遷移図を示せ.

4. nMOSトランジスタの伝送ゲートを用いた論理回路について以下の間に答えよ。nMOSトランジスタは、電圧の高い端子をドレイン、電圧の低い端子をソースとする。ドレインからソースに流れる電流 $I_{DS}$ は、ドレイン・ソース間電圧 $V_{DS}$ 、ゲート・ソース間電圧 $V_{GS}$ によって、

- ① しゃ断領域 ( $V_{GS} \leq V_T$ )  $I_{DS} = 0$
- ② 非飽和領域 ( $V_{GS} > V_T, V_{DS} < V_{GS} - V_T$ )  

$$I_{DS} = 2K(V_{GS} - V_T)V_{DS} - KV_{DS}^2$$
- ③ 飽和領域 ( $V_{GS} > V_T, V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$ )  

$$I_{DS} = K(V_{GS} - V_T)^2$$

で表される。ただし、電源電圧 $V_{DD} = 1.2V$ 、しきい値電圧 $V_T = 0.2V$ 、利得係数 $K = 10\mu S/V$ とする。また、高電圧は論理1、低電圧は論理0とする正論理を用いる。

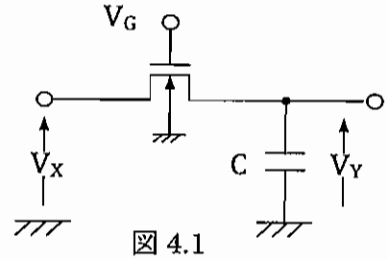


図 4.1

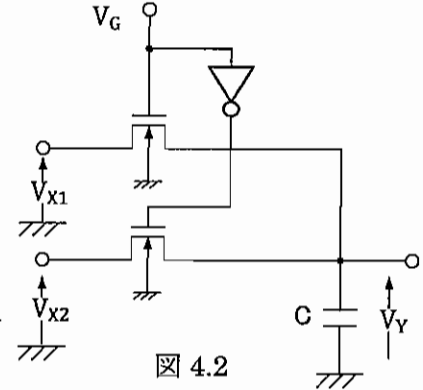


図 4.2

- 1) 図 4.1 の回路において、直流の入力電圧 $V_X$  ( $V_{DD} \geq V_X \geq 0$ )を加えたとき、
  - a) 制御電圧 $V_G = 1.2V$  のとき、出力電圧 $V_Y$ を求めよ。
  - b) 制御電圧 $V_G = 0V$  のとき、出力電圧 $V_Y$ はどのようなになるか。
  - c) この回路の論理動作を説明せよ。
- 2) 図 4.2 の回路において、入力電圧 $V_{X1}, V_{X2}$ 、出力電圧 $V_Y$ 、制御電圧 $V_G$ に対する論理変数を $X_1, X_2, Y, G$ とすると、
  - a) 論理関数 $Y$ を求めよ。
  - b) 論理関数 $Y$ が示す回路の論理動作を説明せよ。
- 3) 図 4.1 の回路において、入力電圧 $V_X = 0V$ 、制御電圧 $V_G = 0V$ 、キャパシタに電源電圧 $V_{DD} = 1.2V$ に相当する電荷が蓄積された状態から、制御電圧 $V_G$ を $1.2V$ に変化させたとき、
  - a) 出力電圧 $V_Y$ に対するゲート・ソース間電圧 $V_{GS}$ とドレイン・ソース間電圧 $V_{DS}$ を求めよ。
  - b) nMOS トランジスタが上記①, ②, ③の動作領域となる出力電圧 $V_Y$ の電圧範囲をそれぞれ示せ。
  - c) 出力電圧 $V_Y$ に対する放電電流 $I_{DS}$ を求めよ。
  - d) 出力電圧 $V_Y$ の時間変化の概形を示せ。
- 4) 図 4.1 の回路において、入力電圧 $V_X = 1.2V$ 、制御電圧 $V_G = 0V$ 、キャパシタに電荷が蓄積されていない状態から、制御電圧 $V_G$ を $1.2V$ に変化させたとき、
  - a) 出力電圧 $V_Y$ に対するゲート・ソース間電圧 $V_{GS}$ とドレイン・ソース間電圧 $V_{DS}$ を求めよ。
  - b) nMOS トランジスタが上記①, ②, ③の動作領域となる出力電圧 $V_Y$ の電圧範囲をそれぞれ示せ。
  - c) 出力電圧 $V_Y$ に対する充電電流 $I_{DS}$ を求めよ。
  - d) 出力電圧 $V_Y$ の時間変化の概形を示し、3)の d)と比較して、特徴を述べよ。

5. 情報源アルファベット  $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, N\}$  を有する定常無記憶情報源  $X$  が記号  $x \in \mathcal{X}$  を出力する確率を  $P(x)$  で表す. すべての  $x \in \mathcal{X}$  について  $P(x) > 0$  が成り立つとき, 次の間に答えよ.

- 1) この情報源のエントロピー  $H(X)$  を  $P(x)$  を用いて表せ. ただし, エントロピーの単位はビットとする.
- 2) 情報源アルファベット  $\mathcal{X}$  上の2つの確率分布  $P(x)$  と  $Q(x)$  がすべての  $x \in \mathcal{X}$  について  $P(x) > 0$  ならびに  $Q(x) > 0$  を満足するとき, 不等式

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(x) \log_2 \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad (5.1)$$

が成り立つことを証明せよ. なお, 必要ならば  $x > 0$  について成り立つ不等式  $\log_2 x \leq (x-1) \log_2 e$  を用いてもよい. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

- 3) 1) で求めたエントロピー  $H(X)$  について

$$H(X) \leq \log_2 N$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, 不等式 (5.1) を用いてもよい.

- 4) アルファベット  $\mathcal{X}$  に対する2元語頭符号 (瞬時復号可能符号)

$$C = \{c(x) \in \{0, 1\}^+ \mid x \in \mathcal{X}\}$$

において, 記号  $x \in \mathcal{X}$  に対応する符号語  $c(x)$  の長さを  $L(x)$  で表す. ただし,  $\{0, 1\}^+$  は  $\{0, 1\}$  上の空でない有限長の記号列の集合を表す. 符号  $C$  がクラフトの不等式を等号で満足するとき, すなわち

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} 2^{-L(x)} = 1$$

を満たすとき, 情報源  $X$  からの出力記号をこの符号  $C$  によって符号化したときの平均符号長がエントロピー以上であること, すなわち

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)L(x) \geq H(X)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, 不等式 (5.1) が成り立つことを利用してもよい.

6. 表 6.1 に示す状態遷移表に対応する順序回路の設計を考える。ただし、現在の状態を  $q_1q_0$ 、次の状態を  $q_1^{(1)}q_0^{(1)}$ 、入力を  $x_1x_0$ 、出力を  $y_1y_0$  の各 2 ビットで表す。

表 6.1 状態遷移表

		$q_1^{(1)}q_0^{(1)}$		
		$x_1x_0$	00	01
$q_1q_0$	00	00	00	01
	01	00	01	11
	11	00	11	01

		$y_1y_0$		
		$x_1x_0$	00	01
$q_1q_0$	00	01	00	00
	01	11	00	00
	11	10	01	11

1) 表 6.1 の状態遷移表をもとに、状態遷移図を示せ。ただし表記は図 6.1 のように、状態は丸で囲んだ節点で、状態遷移は矢印付きの枝で、状態遷移を起こす入力  $x_1x_0$  とそのときの出力  $y_1y_0$  は  $x_1x_0/y_1y_0$  のラベルで表すものとする。

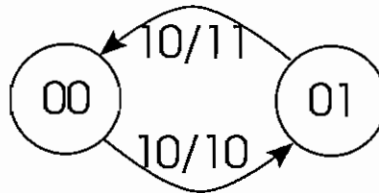


図 6.1 状態遷移図例

- 2) 初期状態が  $q_1q_0 = 00$  であるとして、 $x_1x_0$  に入力系列 00, 01, 11, 01, 11, 01 を与えた時の出力  $y_1y_0$  の列を答えよ。
- 3)  $q_1, q_0, x_1, x_0$  を用いてこの順序回路の出力回路 (以下、回路 A と呼ぶ) を実現することを考える。  $y_1, y_0$  それぞれについてカルノー図を示し、 $q_1, q_0, x_1, x_0$  に関する簡単化した式で  $y_1, y_0$  それぞれを表せ。
- 4) 3) の解を用いて、 $q_1, q_0, x_1, x_0$  を入力として、 $y_1, y_0$  を出力とする 2 入力の NAND ゲートによる 3 段の回路構成により作られた回路 A を示せ。
- 5) この順序回路の状態遷移を実現する回路 (以下、回路 B と呼ぶ) を考える。  $q_1^{(1)}, q_0^{(1)}$  それぞれについて  $q_1, q_0, x_1, x_0$  によるカルノー図を示せ。
- 6) SC フリップフロップ (SR フリップフロップとも呼ぶ) の入力を  $s_i, c_i$ 、現在の出力を  $q_i$ 、次の状態の出力を  $q_i^{(1)}$  とすると、その動作は式 (6.1) の論理式で表される。 2 つの SC フリップフロップを用いて回路 B を実現することを考える。  $s_1, c_1, s_0, c_0$  それぞれについて  $q_1, q_0, x_1, x_0$  によるカルノー図を示せ。 また、 $q_1, q_0, x_1, x_0$  に関する簡単化した式で  $s_1, c_1, s_0, c_0$  それぞれを表せ。

$$\begin{cases} q_i^{(1)} = s_i \vee \bar{c}_i q_i \\ s_i c_i = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

7. 二分木のうち、全ての節点において以下の条件を満たすものは二分探索木と呼ばれる。

条件： (左側の子節点の要素の値) < (その節点の要素の値) かつ  
(その節点の要素の値) ≤ (右側の子節点の要素の値)

ただし、子節点が存在しない場合はそれぞれの不等式が成り立つものとする。

図 7.1 は二分探索木の例である。図 7.2 に示す C 言語のプログラムにおいて関数 search は二分探索木上の値の探索を、関数 insert は二分探索木の逐次構築を行うものである。題意に関係ない main 関数等は省略している。

このプログラムに関して、以下の問に答えよ。

- 1) プログラム中の空欄 

A
---

 , 

B
---

 , 

C
---

 を答えよ。
- 2) 例えば 3 個のデータ 3, 5, 2 をこの順に入力したときに構築される二分探索木を (3, 5, 2) と表すことにする。これは具体的には関数 insert を以下の系列で実行することを意味する。  
`root = insert( NULL, 3 ); root = insert( root, 5 ); root = insert( root, 2 );`  
このとき構築される二分探索木の高さを  $h(3, 5, 2)$  と表すことにすると、 $h(3, 5, 2) = 2$  である。  
 $h(2, 3, 5, 7)$  ,  $h(2, 5, 3, 7)$  ,  $h(2, 5, 5, 7)$  ,  $h(7, 5, 3, 2)$  の値をそれぞれ答えよ。
- 3) 相異なる  $n$  個のデータで構築される二分探索木の高さの最小値を  $n$  の式で表せ。解は整数となるような式とせよ。このとき、 $x$  より大きくない最大の整数を表す記号  $\lfloor x \rfloor$  ,  $x$  より小さくない最小の整数を表す記号  $\lceil x \rceil$  を用いてもよい。
- 4) 7 個のデータ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 を入力するとき、二分探索木の高さが最も小さくなるような入力順の一例を示し、そのときの二分探索木の高さを答えよ。 $h(3, 5, 2) = 2$  に準じた記法を用いて答えること。
- 5) 相異なる  $n$  個のデータから二分探索木を構築するとき、一般的にどのような入力順にすれば木の高さを最小にできるか。
- 6) 二分探索木 (5, 8, 17, 3, 7, 21, 16, 2, 22, 4, 18) を図 7.1 と同様の方法により描け。
- 7) 関数 search は、ある値のデータが二分探索木の上に存在するか否かを調べるための再帰関数である。6) で構築した二分探索木に対してデータがランダムに問い合わせられるとき、search が呼び出される回数の期待値を小数第一位まで求めよ。ただし、格納した 11 個のデータが等確率で問い合わせられるものとし、存在しないデータが問い合わせられることは無いとする。main 関数等からの最初の呼び出しも 1 回と数える。
- 8) 6) で構築した二分探索木は、根から見て左右の部分木の高さにアンバランスがある。ここで木の回転を行うことにより、全ての節点においてその左右の部分木の高さの差が高々 1 になるようにしたい。最小の回数の回転でこれを行うには、どの節点を選び、右回転または左回転のどちらを行えばよいか答えよ。図 7.3 は木の回転の例を示したものである。
- 9) 8) の操作によって得られた二分探索木を、図 7.1 と同様の方法により描け。また 7) と同様に search の呼び出し回数の期待値を求め、平均的な探索効率が 8) で行った修正により 7) からどう変化したかを論じよ。

(次ページにつづく)



(前ページのつづき)

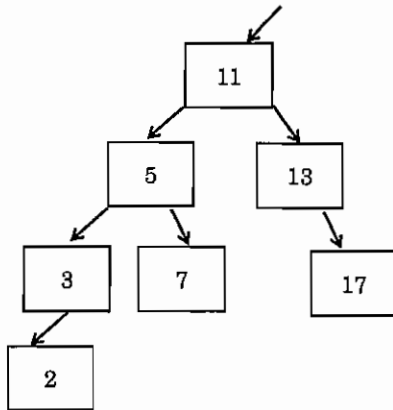


図7.1 二分探索木の例

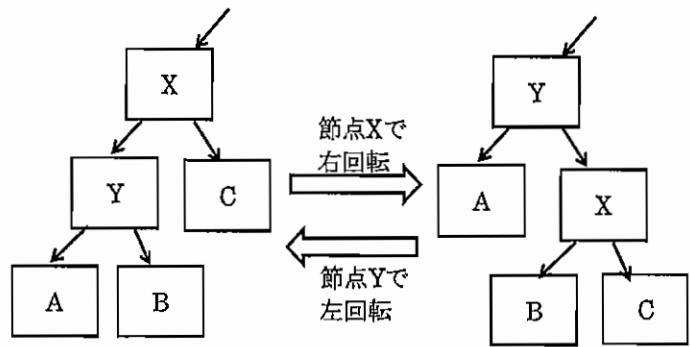


図7.3 木の回転

```

#include <stdio.h>
typedef struct node{
    int key;
    struct node *left;
    struct node *right;
} node;

node* search(node *ptr, int key){
    if(ptr == NULL) return(NULL);
    if(key < ptr->key) return(search(ptr->left, key));
    else if(key == ptr->key) return(ptr);
    else return( A );
}

node* insert(node *root, int key){
    node *new, *ptr;
    if((new = malloc(sizeof(node))) == NULL) exit(1);    (注1)
    new->key = key;
    new->left = new->right = NULL;
    if(root == NULL) return(new); /* first node as root */
    ptr = root;
    while(ptr != NULL){
        if(key < ptr->key){
            if(ptr->left == NULL){
                ptr->left = new; break;
            }
            ptr = B ;
        }else{
            if(ptr->right == NULL){
                ptr->right = new; break;
            }
            ptr = C ;
        }
    }
    return(root);
}
  
```

注1: メモリは十分に準備されており  
エラー終了しないと仮定する  
注2: 題意に関係ない main 等は省略

図7.2