専門科目（午前）　　　　　　　　２０　大修

情報工学

時間　9 : 30 ～ 12 : 30

集積システム専攻・計算工学専攻

注　意　事　項

1. 次の７題の中から４題を選択して解答せよ．５題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は１題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

---

1. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す. m 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ の固有値 $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ はすべて相異なり, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_m|$ を満たしているとする. λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ に対応する固有ベクトルを各々$\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{C}^m$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ で表す. 以下の問に答えよ.

1) a) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は, 複素数をスカラーとするベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ で一次独立となることを示せ.

b) 固有値 λ_1 は実数となることを示せ. また, λ_1 に対応する固有ベクトルとして実ベクトルが存在することを示せ.

2) 集合 $M = \left\{ \sum_{k=2}^{m} c_k \boldsymbol{u}_k \mid c_k \in \mathbb{C} \ (k = 2, 3, \ldots, m) \right\}$ を定義する. 任意の $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$ からベクトル列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots$ を

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{z}_n &= A^n \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_n &= \frac{\boldsymbol{z}_n}{\|\boldsymbol{z}_n\|} \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

と定義する. ただし, $\mathbb{R}^m \setminus M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x} \notin M\}$ とし, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対して, $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} z_i^2}$ とする.

a) すべての $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus M$ に対して, $A\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \setminus M$ となることを示し, 式 (1.1) において $\|\boldsymbol{z}_n\| > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となることを示せ.

b) $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{R}^m$ は, 固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルとする. また, 式 (1.1) のベクトル列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots$ に対して, 実数列 $d_n = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\boldsymbol{x}_n - \alpha \boldsymbol{u}_1\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を定義する. d_n^2 を $\boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{u}_1$ を用い, min と α を用いずに表せ.

c) すべての $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$ に対して, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ が成立することを示せ.

2. 周期 $2L$ をもつ実数 x の実関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は次式で表される．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

ここで，

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

である．このとき，関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開における第 0 項から第 N 項 $(N \geq 1)$ までの部分和 $\widetilde{f}_N(x)$ は以下のように定義される．

$$\widetilde{f}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

今，関数 $\widehat{g}(x)$ を以下のように定義する．

$$\widehat{g}(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (\ 0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

そして，$g(x)$ を，$-\pi \leq x < \pi$ の範囲で $g(x) = \widehat{g}(x)$ を満たす，周期 2π の周期関数とする．

1) 関数 $g(x)$ のフーリエ係数 a_n, b_n を求めよ．

2) 1) の結果を利用して，次式を導け．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

3) 1) で得られたフーリエ級数展開における第 0 項から第 $2N$ 項までの部分和 $\widetilde{g}_{2N}(x)$ を x についての関数として考える．

   a) この関数を x について微分せよ．

   b) この関数の値が極値をとる x の値を，$0 < x < \pi$ の範囲においてすべて求めよ．

4) 3)b) で得られた極値をとる x の値のうち，もっとも小さい値を x_0 とする．このとき，以下の K の値を求めよ．

$$K = \lim_{N \to \infty} \widetilde{g}_{2N}(x_0)$$

ただし，$\pi = 3.14$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = 1.85$ とする．

3.

1) アルファベット $\{0,1\}$ で表現された二進数を入力とする ε 遷移を含まない決定性有限状態オートマトンについて以下の問に答えよ．ただし，オートマトンへの入力は二進数の最上位ビット (MSB) から先に入力するものとし，最上位ビットから 0 が続いてもよい．たとえば，入力記号列 "00010" は，二進数 10 を表わすと考える．また，状態遷移図において，開始状態は四角によって，終了状態は二重の円によって，その他の状態は円によって，それぞれ表わすものとする．なお，空列は二進数とは考えない．

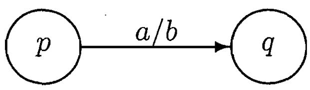
a) 任意の二進数のみを受理する決定性有限状態オートマトンの状態遷移図を書け．

b) 偶数のみを受理する決定性有限状態オートマトンの状態遷移図を書け．また，このオートマトンが偶数のみを受理することを説明せよ．

c) b) で作成したオートマトンに対応する正規文法 G を定義せよ．

d) 3 の倍数のみを受理する決定性有限状態オートマトンの状態遷移図を書け．また，このオートマトンが 3 の倍数のみを受理することを説明せよ．

2) 入力にしたがって各状態遷移ごとに 1 つの記号を出力する ε 遷移を含まない決定性有限状態オートマトンを考える．このようなオートマトンを変換器という．状態遷移図では，状態間の矢印に入力記号と出力記号を "/" (スラッシュ) で区切って表記する．たとえば，状態 p で記号 a を入力して，状態 q に遷移する時，記号 b を出力する場合は，以下のように書く．



アルファベット $\{0,1\}$ を入出力記号として扱う変換器について以下の問に答えよ．ただし，これらの変換器は空列を出力しないものとする．二進数，状態遷移図の表現は 1) と同様とせよ．

a) 入力された二進数を 2 で割った商を出力する変換器の状態遷移図を書け．また，この変換器が二進数を 2 で割った商を出力することを説明せよ．

b) 入力された二進数を 3 で割った商を出力する変換器の状態遷移図を書け．また，この変換器が二進数を 3 で割った商を出力することを説明せよ．

4. 図 4.1 は，3 つの nMOS トランジスタ M_1，M_2，M_3 を含む回路を示し，表 4.1 にその回路パラメータを示す．ここで，各トランジスタの寄生容量は無視できるとする．

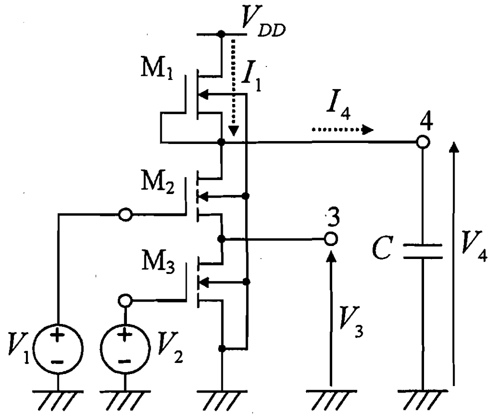


図 4.1 回路 1

表 4.1 回路パラメータ

電源電圧	$V_{DD} = 5.0\,\mathrm{V}$
出力負荷容量	$C = 0.1 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}$
M_1 のしきい値電圧	$V_{Td} = -1.0\,\mathrm{V}$
M_2，M_3 のしきい値電圧	$V_{Te} = 1.0\,\mathrm{V}$
M_1，M_2，M_3 のトランスコンダクタンスパラメータ	$K = 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{A/V^2}$

$$I_{DS} = \begin{cases} 0 & (V_{GS} - V_T \leq 0 \quad \text{:遮断領域)} \\ 2K(V_{GS} - V_T)V_{DS} - KV_{DS}^2 & (0 \leq V_{DS} < V_{GS} - V_T \quad \text{:非飽和領域)} \\ K(V_{GS} - V_T)^2 & (0 < V_{GS} - V_T \leq V_{DS} \quad \text{:飽和領域)} \end{cases} \qquad (4.1)$$

式(4.1)は nMOS トランジスタの 3 つの動作領域における電流電圧特性を表し，I_{DS} はドレイン・ソース間電流，V_{GS} はゲート・ソース間電圧，V_{DS} はドレイン・ソース間電圧，V_T は表 4.1 におけるしきい値電圧 V_{Td}，V_{Te} に対応する．

1) V_1 と V_2 の値が定まったあと，回路が安定し $I_4 = 0$ となった状態を考える．
   a) M_1，M_2，M_3 それぞれにおける V_{GS} と V_{DS} を，V_1，V_2，V_3，V_4 と V_{DD} を用いた式で表せ．
   b) $V_1 = 0\mathrm{V}$，$V_2 = V_{DD}$ のとき，M_2 は遮断領域で動作し，M_1 と M_3 はそれぞれ非飽和領域で動作している．このときの I_1，V_3，V_4 の値をそれぞれ求めよ．
   c) $V_1 = V_{DD}$，$V_2 = V_{DD}$ のときの V_3，V_4 の値をそれぞれ求めよ．なお，必要であれば $\sqrt{14} = 3.74$，$\sqrt{15} = 3.87$ の近似値を使用せよ．
   d) $V_1 = V_{DD}$，$V_2 = 0\mathrm{V}$ のときの I_1，V_4 の値をそれぞれ求めよ．また，このときの M_1，M_2，M_3 の動作領域を示せ．

(次ページにつづく)

（前ページのつづき）

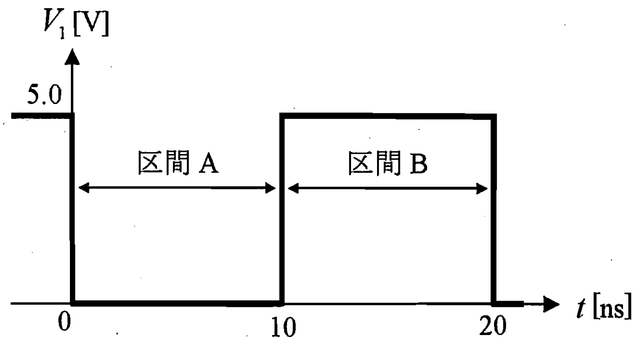


図 4.2 V_1 の波形

2) $V_2 = V_{DD}$ に固定し，V_1 が図 4.2 に示す方形波であるときの回路の応答を考える．ただし，ここでは簡単のため，$\mathrm{M_1}$ は $V_4 < V_{DD}$ のとき飽和領域で動作し，$V_4 = V_{DD}$ のとき非飽和領域で動作するとし，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ は遮断領域以外ではそれぞれ等価抵抗 $R = \dfrac{1}{2K(V_{DD} - V_{Te})}$ に置き換えられるものとする．また，V_1 が変化する直前では $I_4 = 0$ であるとし，$\mathrm{M_1}$ の飽和領域における電流を $I_{SAT} = KV_{Td}^2$ としたとき，$t = 0$ のときの V_4 の値を $V_{SAT} = 2RI_{SAT}$ と近似できるとする．

a) 図 4.2 の区間 A において，$V_4 = 0.5(V_{DD} - V_{SAT}) + V_{SAT}$ となる時刻 t_1 を求めよ．

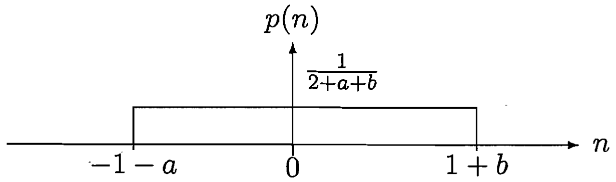
b) 図 4.2 の区間 B において，$V_4 = 0.5(V_{DD} - V_{SAT}) + V_{SAT}$ となる時刻 t_2 を求めよ．なお，必要であれば $\ln 2 = 0.69$ の近似値を使用せよ．

c) 図 4.2 の区間 A, B における V_4 の波形の概形を描け．

5. 送信信号が $s=\pm1$ である2値通信システムがある．受信信号 r は，送信信号 s に統計的に独立な雑音 n が加わって得られる．すなわち，

$$r = s + n$$

である．ただし，雑音 n は $-1-a$ から $1+b$ $(a, b>0)$ の間だけに一様分布し，その確率密度関数 $p(n)$ は，下図のように与えられるものとする．



受信機は，判定しきい値 x を設定し，次の復号規則にしたがって送信信号 s を推定する．

- 受信信号 r が x 以上ならば，$s=+1$ が送信されたものと判定する．また，
- 受信信号 r が x 未満ならば，$s=-1$ が送信されたものと判定する．

1) 送信機から $s=+1$ が送信されたときに，誤りの生じる確率を判定しきい値 x の関数として求めよ．同様に，$s=-1$ が送信されたときに，誤りの生じる確率を x の関数として求めよ．

2) 送信信号 $s=\pm1$ の発生確率が，

(i) $\Pr(s=+1)=\Pr(s=-1)=1/2$, ならびに

(ii) $\Pr(s=+1)=3/4$, $\Pr(s=-1)=1/4$

である2つの場合それぞれに関して，

a) この通信システムの平均誤り率 P_E を x の関数として求め，グラフに表せ．

b) 平均誤り率 $P_E(x)$ を最小とする，最適な判定しきい値 x_{opt} ならびにそのときの平均誤り率 $P_E(x_{\mathrm{opt}})$ を求めよ．

3) 上の復号規則とは別に，受信信号として $r=R$ を受信したときに，送信信号が $s=\pm1$ である条件付き確率密度 $p(s=+1\mid r=R)$ と $p(s=-1\mid r=R)$ の大小を，

$$f(R)=\Big\{p(s=+1\mid r=R)-p(s=-1\mid r=R)\Big\}p(r=R)$$

によって比較し，

- $f(R)\geq 0$ ならば，$s=+1$,
- $f(R)<0$ ならば，$s=-1$,

と判定する，基本的な復号規則がある．

a) この復号規則は何と呼ばれるか．また，その特徴は何か．

b) **2)-(ii)** と同じく，送信信号 $s=\pm1$ の発生確率が $\Pr(s=+1)=3/4$, $\Pr(s=-1)=1/4$ である場合について，$f(R)$ のグラフを $-2-a<R<2+b$ の範囲で描け．さらに，この復号法による平均誤り率を求めよ．

6. 入力系列のパターンを検出する順序回路Cを設計する．この回路は図 6.1 に示す回路と等価で，3 個以上の 1 が連続して現れたときに 1 を出力し，そうでない場合に 0 を出力する．論理ゲートは 2 入力の AND ゲート，2 入力の OR ゲート，NOT ゲート以外を用いてはいけない．フリップフロップは立ち上がり動作のエッジトリガ型フリップフロップとする．

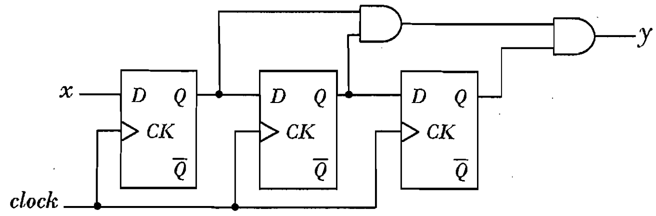


図 6.1

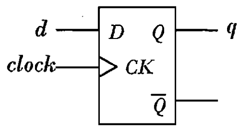


図 6.2

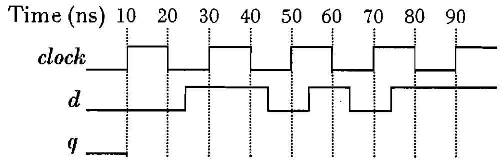


図 6.3

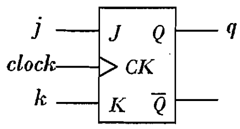


図 6.4

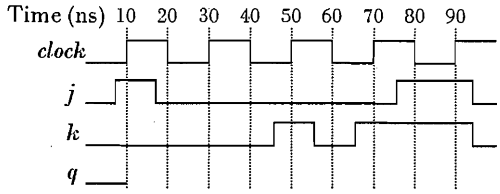


図 6.5

表 6.1 Q_{next}

Q \ JK	00	01	11	10
0				
1				

1) 図 6.2 に示す D フリップフロップの入力波形を図 6.3 に示す．出力 q の初期値を 0 として，出力 q の動作波形を描け．

2) 図 6.4 に示す JK フリップフロップの入力波形を図 6.5 に示す．出力 q の初期値を 0 として，出力 q の動作波形を描け．また表 6.1 に示す JK フリップフロップの動作特性を完成させよ．フリップフロップにおける状態 Q の次の状態を Q_{next} と記述する．

3) 図 6.6 に枝を追加することで順序回路Cの状態遷移図を完成させよ．丸印の中の左側の文字列が状態を，右側の数字が出力を表す．

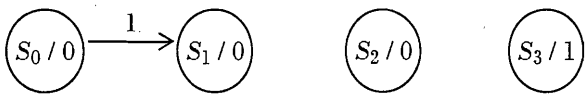


図 6.6

表 6.2

M	N	x	M_{next}	N_{next}	y

4) 順序回路Cの入力を x，出力を y とする．図 6.6 における S_0, S_1, S_2, S_3 という状態をそれぞれ 2 ビットの 2 進数 00, 01, 10, 11 で表現し，上位ビットを M，下位ビットを N とする．表 6.2 に示す順序回路Cの遷移表を完成させよ．またカルノー図を用いて出力 y，M の次の状態 M_{next}，N の次の状態 N_{next} のそれぞれの式を簡単化せよ．

5) 2 個の D フリップフロップとできるだけ少ない論理ゲートを用いて順序回路Cを作成せよ．

6) 2 個の JK フリップフロップとできるだけ少ない論理ゲートを用いて順序回路Cを作成せよ．

7. 次ページにある図 7.1 の C 言語で書かれたプログラムを読み，以下の問に答えよ．

1) 下記の関数 ex1 を実行した後の x の内容を示せ．

```
void ex1(void)
{
    x[0] = 7; x[1] = 10; x[2] = 1; x[3] = 5;
    B(0, 1, 3);
}
```

2) 下記の関数 ex2 を実行させたとき，実行が終了するまでの A，B の呼び出し列を，引数 il，m，ir の値とともに書け．関数の呼び出し列とは，その関数の呼び出される順序を呼び出し時に渡される引数の値とともに記したものである．例えば，関数 F の呼び出し列 F(1, 0)，F(3, 1) は，関数 F が 2 回呼び出され，最初は引数 1，0 が，2 度目は 3，1 が呼び出し時に渡されることを意味する．

```
void ex2(void)
{
    x[0] = 9; x[1] = 3; x[2] = 4; x[3] = 2;
    A(0, 3);
}
```

3) 2) の関数 ex2 を実行した後の x の内容を示し，A は x に対してどのような作用を行う関数かを説明せよ．

4) x[0], x[1], ... , x[n - 1] (ただし $1 \leq n \leq$ MAX_LENGTH とする) に値を代入し，A(0, n - 1) を実行させたときの A の呼び出し回数を Z(n) とする．ただし，最初の A(0, n - 1) の呼び出しも 1 回に数えるものとする．このとき，次の問に答えよ．

   a) $n = 2^m$ (m は非負整数) のとき，Z(n) を m を使った式で表せ．

   b) 一般の n について，Z(n) を漸化式で表せ．

5) 配列 x に対し，再帰呼び出しを用いないで，A と同じ計算を行う図 7.2 のような関数 D を作った．空欄に適当なプログラムコードを埋めよ．ただし，空欄には関数 B の呼び出しを含むものとする．

(次ページへ続く)

(前ページの続き)

```
#define MAX_LENGTH 1000
int x[MAX_LENGTH];

void A(int il, int ir)
{
    int m;

    if (il >= ir)  return;
    m = (il + ir) / 2;
    A(il, m);
    A(m + 1, ir);
    B(il, m, ir);
}
```

```
void B(int il, int m, int ir)
{
  int i, j, k;
  int temp[MAX_LENGTH];

  i = il;
  j = m + 1;
  for (k = il; k <= ir; k++)
    if (i > m) temp[k] = x[j++];
    else if (j > ir) temp[k] = x[i++];
    else if (x[i] <= x[j]) temp[k] = x[i++];
    else temp[k] = x[j++];
  for (k = il; k <= ir; k++)
    x[k] = temp[k];
}
```

図 7.1

```
void D(int il, int ir)
{
    int m, i, j, size;

    size = 1;
    while (size <= (ir - il)) {
       for (i = il; i <= ir; i = i + size * 2) {
          j = i + size * 2 - 1;
          m = (i + j) / 2;

       }
       size = size * 2;
    }
}
```

図 7.2