専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　１９　大修

情報工学　　　　　　　　　　　　　　　時間　9：30 ～ 12：30

集積システム専攻・計算工学専攻

注　意　事　項

1. 次の7題の中から4題を選択して解答せよ．5題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は1題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

とする。以下の問に答えよ。

1) 行列 A_1, A_2, A_3 の固有値をすべて求めよ。

2) 行列 A_1, A_2, A_3 の階数を求めよ。

3) 行列 A_1, A_2, A_3 が対角化可能かどうか調べよ。もし、行列 A_i ($i = 1, 2, 3$) が対角化可能であるならば、${P_i}^{-1}A_iP_i$ が対角行列となるような行列 P_i を求めよ。そうでないならば、A_i が対角化不可能であることの理由を述べよ。

4) 行列 ${A_1}^n$ の固有値をすべて求め、それ以外に固有値がないことを証明せよ。ただし、n は正の整数とする。

5) 行列 ${A_2}^4 - 5{A_2}^3 + 8{A_2}^2 - 4A_2$ を計算せよ。

2. Nを正の整数とし、N個の確率変数$x_1, x_2, \ldots, x_N$を考える。これらの確率変数は実数であり、互いに統計的独立とする。また、整数n（$1 \le n \le N$）において、x_nの確率密度関数$p_n(x_n)$を

$$p_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{(x_n - m_n)^2}{2\sigma_n^2}\right] \tag{2.1}$$

とする。ここで、m_nとσ_n^2は実数の定数であり、$\sigma_n^2 > 0$とする。以下の問に答えよ。ただし、関数$g(x_1, x_2, \ldots, x_N)$の平均値は、$\langle g(x_1, x_2, \ldots, x_N)\rangle$と表すことにする。

1) $\int_{-\infty}^{\infty} x_n p_n(x_n) dx_n$と$\int_{-\infty}^{\infty} (x_n - m_n)^2 p_n(x_n) dx_n$の意味を考え、これらを$m_n$, σ_n^2を用いて表せ。

2) N次元ベクトル$\mathbf{x}$と$\mathbf{m}$、並びに$N \times N$対角行列$\mathbf{D}$を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} &= [x_1, x_2, \ldots, x_N] \\ \mathbf{m}^{\mathrm{T}} &= [m_1, m_2, \ldots, m_N] \\ \mathbf{D} &= \mathrm{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_N^2] \end{aligned}$$

ここで、Tは転置を表し、$\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_N]$は$d_n$を$(n,\ n)$要素とする対角行列である。$x_1, x_2, \ldots, x_N$の結合確率密度関数$p_x(x_1, x_2, \ldots, x_N)$は

$$p_x(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \mathbf{D})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right] \tag{2.2}$$

となることを証明せよ。ただし、$\det \mathbf{D}$は$\mathbf{D}$の行列式である。

3) 新たに、N個の確率変数$y_1, y_2, \ldots, y_N$を考える。N次元ベクトル$\mathbf{y}$を$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = [y_1, y_2, \ldots, y_N]$と定め、$\mathbf{y}$と$\mathbf{x}$は以下の関係を満たすものとする。

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) + \tilde{\mathbf{m}} \tag{2.3}$$

ここで、$\mathbf{A}$は実数の定数を要素とする$N \times N$直交行列であり、$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$を満足し、$\tilde{\mathbf{m}}$は実数の定数を要素とする$N$次元ベクトルである。$\langle \mathbf{y} \rangle = [\langle y_1 \rangle, \langle y_2 \rangle, \ldots, \langle y_N \rangle]^{\mathrm{T}}$とすると

$$\langle \mathbf{y} \rangle = \tilde{\mathbf{m}} \tag{2.4}$$

となることを示せ。

4) $N \times N$行列$\mathbf{R}_y$を$\mathbf{R}_y = \langle (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{m}})(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{m}})^{\mathrm{T}} \rangle$と定める。すなわち、整数$n_1$（$1 \le n_1 \le N$）と$n_2$（$1 \le n_2 \le N$）において、$\mathbf{R}_y$の$(n_1,\ n_2)$要素は$\langle (y_{n_1} - \langle y_{n_1} \rangle)(y_{n_2} - \langle y_{n_2} \rangle) \rangle$となる。このとき

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{2.5}$$

となることを示せ。

5) x_nは$y_1, y_2, \ldots, y_N$に依存するので、$x_n = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_N)$と表す。このとき、$y_1, y_2, \ldots, y_N$の結合確率密度関数$p_y(y_1, y_2, \ldots, y_N)$は

$$\begin{aligned} p_y(y_1, y_2, \ldots, y_N) &= p_x[f_1(y_1, y_2, \ldots, y_N), f_2(y_1, y_2, \cdots, y_N), \ldots, f_N(y_1, y_2, \ldots, y_N)] \\ &\quad \times \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)} \right| \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。なお、$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)}$はヤコビアンである。式(2.6)から、$\mathbf{x}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{D}$の代わりに$\mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{m}}$, $\mathbf{R}_y$を用いた$p_y(y_1, y_2, \ldots, y_N)$を求めよ。

3. 以下に示す $[\![n]\!]$ は自然数 (非負整数) n の λ-式による表現である。

$$[\![0]\!] \equiv \lambda f \lambda x.x$$
$$[\![1]\!] \equiv \lambda f \lambda x.fx$$
$$[\![2]\!] \equiv \lambda f \lambda x.f(fx)$$
$$\vdots$$
$$[\![n]\!] \equiv \lambda f \lambda x.\underbrace{f(f \cdots (f}_{n}\, x) \cdots)$$
$$\vdots$$

1) $[\![n]\!]gy$ および $[\![n+1]\!]gy$ を求めよ。

2) $[\![n]\!]$ を用いて $[\![n+1]\!]$ を表せ。

3) $\mathbf{s}[\![n]\!] = [\![n+1]\!]$ となる関数 $\mathbf{s}$ を λ-式で表せ。

4) $\mathbf{a}[\![m]\!][\![n]\!] = [\![m+n]\!]$ となる関数 $\mathbf{a}$ を λ-式で表せ。

5) 問 4) の $\mathbf{a}$ を用いた $\mathbf{a}[\![2]\!][\![3]\!]$ の計算過程を示せ。

6) $\mathbf{h} \equiv \lambda m \lambda n \lambda f.m(nf)$ は 2 つの自然数を引数として 1 つの自然数を返す関数である。$\mathbf{h}$ は何を計算をする関数か理由とともに説明せよ。

4. 図 4.1 の回路のインピーダンスを Z とし、また $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ および $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ と定義する。

1) a) Z を角周波数 ω の関数として L と C と R を用いて表せ。
   b) Z を ω の関数として R と ω_0 と Q を用いて表せ。
   c) 正のある角周波数で Z が実数になるための Q の条件を求めよ。
   d) 問 1) c) の条件下で、Z が実数になる角周波数 ω_1 (>0) を ω_0 と Q で表せ。

2) a) $|Z|$ を ω の関数として R と ω_0 と Q を用いて表せ。
   b) $|Z|$ が極大値をもつための Q の条件を求めよ。
   c) 問 2) b) の条件下で、$|Z|$ が極大になる角周波数 ω_2 (>0) を ω_0 と Q で表せ。

3) a) この回路を単位インパルス $\delta(t)$ の電流源で駆動したとき、L を流れる電流を $i(t)$ とする。$\delta(t)$ と $i(t)$ の関係を表す微分方程式を書け。
   b) 問 3) a) の微分方程式の解 $i(t)$ が振動成分をもつための Q の条件を求めよ。
   c) 問 3) b) の条件下で、$i(t)$ の振動成分の角周波数 ω_3 (>0) を ω_0 と Q で表せ。

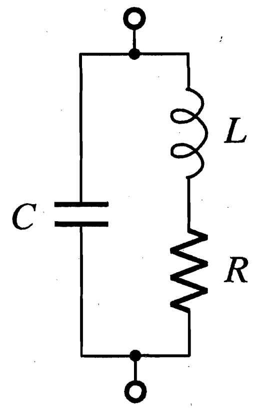

図 4.1

5. 以下の問に答えよ。ただし、$\log_2 3 = 1.58$ および $\log_2 5 = 2.32$ と近似せよ。

1) 前日に夕焼けが観測されると、当日晴れになりやすいことが経験的に知られている。ある市で実際に観測した結果を表 5.1 に示す。ただし、確率変数 X, Y はどちらも 1 または 0 をとり、X が前日の夕焼けの観測結果を、Y が当日の天候の観測結果を示す。それぞれ、1 は夕焼けまたは晴天を観測したことを示し、0 は夕焼けまたは晴天を観測していないことを示す。

表 5.1 X と Y の組み合わせ条件における観測日数

	$Y=1$	$Y=0$
$X=1$	24	8
$X=0$	16	16

a) エントロピー $H(Y)$ の値を求めよ。

b) 条件付エントロピー $H(Y|X)$ の値を求めよ。

c) 相互情報量 $I(X;Y)$ の意味を説明し、その値を求めよ。

d) $I(U;V) = I(V;U)$ が成立することを証明せよ。ただし、U, V は有限アルファベットに値をとる確率変数とする。

2) 図 5.1 の通信路線図で表される 2 元対称通信路があり、その送信記号および受信記号の確率変数をそれぞれ A, B とし、どちらも 0 と 1 の 2 値を取る。また送信記号の生起確率を $p(A=0) = 0.3$ および $p(A=1) = 0.7$ とする。

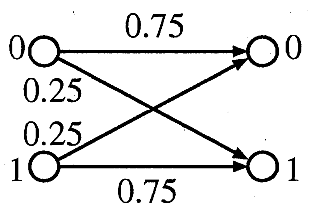

図 5.1 2 元対称通信路

a) 受信記号の生起確率 $p(B=0)$ および $p(B=1)$ の値を求めよ。

b) 相互情報量 $I(A;B)$ の値を求めよ。

c) 図 5.1 の通信路の通信路容量を求めよ。

d) 通信路に雑音があり情報の伝送誤りが発生するとき、誤りなく情報を伝送するために通信路符号化を行う。伝送誤り率を任意に小さくできるという条件下における符号化法の情報伝送速度 R の限界を説明せよ。

e) 図 5.1 の通信路において、次の送信手順を考える。$x \in \{0,1\}$ が無記憶情報源から生成されるとき、通信路符号語は写像 $\phi(x)$ によって決定される。符号語は $\phi(0) = (0,0,0)$ および $\phi(1) = (1,1,1)$ とし、その生起確率を $p(x=0) = 0.3$ および $p(x=1) = 0.7$ とする。受信側は、次の復号法によって復号する。受信語 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \{0,1\}^3$ が与えられたとき、遷移確率 $p(\boldsymbol{y}|x=\alpha)$ ($\alpha = 0$ または $\alpha = 1$) を計算し、$p(\boldsymbol{y}|x=\alpha)$ が最大となる α が送信されたと判断する。このとき、全ての受信語 $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^3$ に対する復号結果を求めよ。また 符号語の平均復号誤り率 ε の値を求めよ。

6. N ビット並列入力の加算器を考える。i $(1 \leq i \leq N)$ ビット目の入力を X_i と Y_i とした時の、X_i と Y_i を入力とする半加算器 (HA_i) の出力を、

$$\begin{aligned} G_i &= X_i \wedge Y_i \\ Q_i &= X_i \bigoplus Y_i \end{aligned}$$

とする。ここで $\wedge$ は論理積演算 (AND)、$\bigoplus$ は排他的論理和演算 (XOR) を表し、論理和演算 (OR) は $\vee$ を用いて表現する。以下、論理式、論理回路は冗長なく構成し、論理ゲートとしては2入力の AND、OR、XOR のみを用いる。また、入力が与えられてから結果が安定するまでを遅延時間とし、上記論理ゲートの遅延時間を全て 1 UT (Unit Time) とする。

1) i ビット目のキャリー（桁上げ）C_i を、G_i と Q_i および C_{i-1} を用いた論理式で表せ。

2) 桁上げを考慮した i ビット目の加算結果（和）S_i を、Q_i と C_{i-1} を用いた論理式で表せ。

3) 4ビットずつの入力 $X_1 \sim X_4$ と $Y_1 \sim Y_4$ およびキャリー入力 C_0 に対して、上記問 1) および 2) で求めた論理式に基づいて4ビットの加算結果 $S_1 \sim S_4$ と上位へのキャリー C_4 を出力する4ビット加算器 (加算器 A) を、8個の HA と論理ゲートを用いて図示せよ。

4) 上記4ビット加算器 A において、$X_1 \sim X_4$ と $Y_1 \sim Y_4$ および C_0 の入力が同時に与えられた時、最後に安定するのがどの出力であるかを示すとともに、それらの入力が与えられてからその出力が安定するまでの遅延時間を UT で表せ。

5) $P_i = X_i \vee Y_i$ とすると、$C_i = G_i \vee (P_i \wedge C_{i-1})$ と書くことができる。これより、$C_i = G_i \vee (P_i \wedge (G_{i-1} \vee (P_{i-1} \wedge C_{i-2}))) = \cdots = G_i \vee (P_i \wedge G_{i-1}) \vee (P_i \wedge P_{i-1} \wedge G_{i-2}) \vee \cdots \vee (P_i \wedge P_{i-1} \wedge \cdots \wedge P_1 \wedge C_0)$ となる。ここで、$p_{i,i} = P_i$、$g_{i,i} = G_i$ とし、$i \leq j, j+1 \leq k$ を満たす任意の j について、

$$p_{i,k} = p_{i,j} \wedge p_{j+1,k} \tag{6.1}$$

$$g_{i,k} = g_{j+1,k} \vee (p_{j+1,k} \wedge g_{i,j}) \tag{6.2}$$

とした $p_{i,k}$ と $g_{i,k}$ を用いると、

$$C_k = g_{i,k} \vee (p_{i,k} \wedge C_{i-1}) \tag{6.3}$$

が成り立つ。$p_{1,4}$ と $g_{1,4}$ を $P_1 \sim P_4$ および $G_1 \sim G_4$ を用いて表せ。

6) 式 (6.1)、(6.2) に基づいて $p_{i,j}$, $p_{j+1,k}$, $g_{i,j}$, $g_{j+1,k}$ を入力とし、$p_{i,k}$, $g_{i,k}$ を出力とする4入力2出力の論理回路を $\mathrm{CLA}_{i,j,k}$ とする。また、式 (6.3) に基づいて $p_{i,k}$, $g_{i,k}$, C_{i-1} を入力とし、C_k を出力とする3入力1出力の論理回路を $\mathrm{CC}_{i,k}$ とする。このとき、4個の HA (HA_1, HA_2, HA_3, HA_4)、4個の CC ($\mathrm{CC}_{1,1}$, $\mathrm{CC}_{1,2}$, $\mathrm{CC}_{1,3}$, $\mathrm{CC}_{1,4}$)、4個の OR ゲート、4個の XOR ゲート、および5個の CLA を用いることで、$X_1 \sim X_4$ と $Y_1 \sim Y_4$ および C_0 に対して、4ビットの加算結果 $S_1 \sim S_4$ と上位へのキャリー C_4 を出力する4ビット加算器 (加算器 B) を構成することができる。5個の CLA のうち、3個が $\mathrm{CLA}_{1,1,2}$, $\mathrm{CLA}_{2,2,3}$, $\mathrm{CLA}_{1,1,3}$ であったとき、残り2個の CLA の添え字を記せ。

7) $\mathrm{CLA}_{i,j,k}$ を用いた上記4ビット加算器 B において、$X_1 \sim X_4$ と $Y_1 \sim Y_4$ および C_0 の入力が同時に与えられた時、最後に安定するのがどの出力であるかを示すとともに、それらの入力が与えられてからその出力が安定するまでの遅延時間を UT で表せ。

8) $N = 2^n (n \geq 2)$ とする。以下の2種類の N ビット加算器において、入力が与えられてから出力が安定するまでの遅延時間を n を用いて UT で表せ。

   a) 加算器 A と同様に問 1) と 2) で求めた論理式に基づく N ビット加算器。

   b) 加算器 B と同様に式 (6.1)～(6.3) に基づく N ビット加算器。

7. T はプログラミング言語 Scheme のあるデータの集合であり、以下の条件を満たす最小の集合として定義されているものとする。

(T1) d が整数値であるとき、d は T の要素である。

(T2) t と t' が T の要素であるとき、ドット対 $(t\ .\ t')$ は T の要素である。

上記の定義は、T の要素は葉ノードが整数でラベル付けされた二分木であることを述べている。T の要素の例を図 7.1 に示す。また、本問題で用いる Scheme の関数 `fringe1`, `fringe2`, `samefringe1`, `samefringe2` の定義を次ページ末尾に示す。

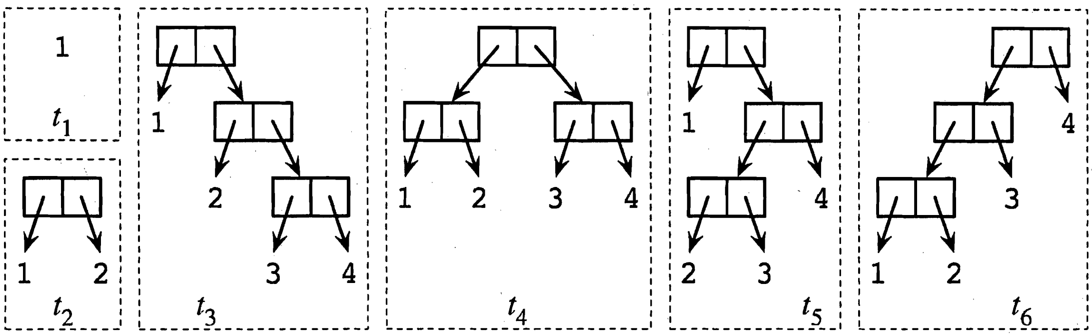

図 7.1 T の要素の例

1) 図 7.1 の $t_1, \ldots, t_4$ は、以下のような S 式として書くことができる。

t_1	`1`
t_2	`(1 . 2)`
t_3	`(1 . (2 . (3 . 4)))`
t_4	`((1 . 2) . (3 . 4))`

また t_3 と t_4 は、それぞれ `(1 2 3 . 4)` および `((1 . 2) 3 . 4)` のように書くこともできる。以下の木を表す S 式を書け。

a) 図 7.1 の t_5

b) 図 7.1 の t_6

2) 以下の値を S 式で書け。

a) 関数 `fringe1` を図 7.1 の t_3 に適用したときの戻り値

b) 関数 `fringe2` を図 7.1 の t_4 に適用したときの戻り値

3) t を T の要素とする。$N(t)$ は t の葉ノードの数を、$D(t)$ は t の深さを表すものとする。例えば図 7.1 の $t_1, \ldots, t_6$ については、$N(t_1) = 1$, $N(t_2) = 2$, $N(t_3) = N(t_4) = N(t_5) = N(t_6) = 4$ および $D(t_1) = 0$, $D(t_2) = 1$, $D(t_4) = 2$, $D(t_3) = D(t_5) = D(t_6) = 3$ となる。関数 `fringe1` を t に適用したときに Scheme の関数 cons が呼び出される回数を $C_1(t)$ とし、関数 `fringe2` を t に適用したときに関数 cons が呼び出される回数を $C_2(t)$ とする。例えば $C_1(t_4) = 8$ および $C_2(t_1) = 1$ となる。

a) n を非負の整数とし、t を $N(t) = 2^n$ かつ $D(t) = n$ である T の要素とする。$C_1(t)$ を n の式で表せ。

b) n を 1 以上の整数とし、t を $N(t) = n$ である T の要素とする。$C_1(t)$ のとり得る値の最大値を n の式で表せ。

c) n を 1 以上の整数とし、t を $N(t) = n$ である T の要素とする。$C_2(t)$ のとり得る値の最大値を n の式で表せ。

4) 関数 `samefringe1` と `samefringe2` は、同じデータを引数としたときに同じ結果を与える。

a) `samefringe2` がどのように動作するかを説明せよ。

b) `samefringe2` の `samefringe1` に対する利点を説明せよ。

本問題で用いる Scheme の関数

```
(define (fringe1 x)
 (if (pair? x)
     (append (fringe1 (car x))
             (fringe1 (cdr x)))
     (cons x '())))

(define (append x y)
 (if (null? x) y
     (cons (car x)
           (append (cdr x) y))))
```

```
(define (fringe2 x)
 (fr2a x '()))

(define (fr2a x a)
 (if (pair? x)
     (fr2a (car x)
           (fr2a (cdr x) a))
     (cons x a)))
```

```
(define (samefringe1 x y)
 (equal? (fringe2 x) (fringe2 y)))
```

```
(define (samefringe2 x y)
 (or (eq? x y)
     (and (pair? x)
          (pair? y)
          (same? (dig1 x)
                 (dig1 y)))))

(define (same? x y)
 (and (eq? (car x) (car y))
      (samefringe2 (cdr x) (cdr y))))

(define (dig1 x)
 (if (pair? (car x))
     (dig1 (cons (car (car x))
                 (cons (cdr (car x))
                       (cdr x))))
     x))
```