専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　１６　大修

情報工学・通信工学

時間　9 : 30 ～ 11 : 00

注　意　事　項

1. 次の 4 題の中から 2 題を選択して解答せよ．3 題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

---

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 0、分散 σ^2 の同一分布 (確率密度関数 $f_X(x)$) を持つ独立な確率変数とする。このとき、

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}\sigma}$$

とおくと、$Z := \lim_{n\to\infty} Z_n$ の確率密度関数は、正規分布 (ガウス分布)

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{1.1}$$

になることが知られている。これは X_i の分布が何であっても、$n \to \infty$ のとき Z_n の分布が正規分布 (ガウス分布) になることを示しており、中心極限定理と呼ばれる。

簡単のため、X_i の確率密度関数 $f_{X_i}(x) = f_X(x)$ が一様分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |x| \le \Delta \text{ のとき、} \\ 0, & \text{その他、} \end{cases}$$

で与えられる場合に関して、中心極限定理が成立することを以下の手順に従って示せ。

確率密度関数が $f_X(x)$ で与えられる確率変数 X に対し、$e^{-j\omega X}$ の平均

$$E\left[e^{-j\omega X}\right] := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} f_X(x)\,dx =: \Phi_X(\omega), \quad j := \sqrt{-1}$$

を X の "特性関数" と呼ぶ。X の特性関数は $f_X(x)$ のフーリエ変換に他ならない。因みに式 (1.1) で与えられるガウス分布の特性関数は再びガウス関数となり、

$$E\left[e^{-j\omega Z}\right] = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

で与えられることが知られている。

1) $Y_i := X_i/\sqrt{n}\sigma$ で与えられる確率変数を導入すれば、$Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ である。Z_n の特性関数 $\Phi_{Z_n}(\omega)$ を、Y_i の特性関数 $\Phi_{Y_i}(\omega)$ を用いて表せ。

2) 以下簡単のため、$X \equiv X_i$, $Y \equiv Y_i$ とおく。

 a) $Y := X/\sqrt{n}\sigma$ の確率密度関数 $f_Y(y)$ を $f_X(x)$ を用いて表せ。

 b) X の k 次のモーメント

$$M_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

 を計算せよ。また、X の分散 σ^2 を求めよ。

 c) Y の特性関数 $\Phi_Y(\omega)$ の冪級数展開

$$\Phi_Y(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k$$

 を求めよ。但し、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{for } |x| < +\infty$$

 は既知として良い。

3) $\Phi_Y(\omega)$ の冪級数展開において、$|\omega^2/n| \le A < 1$ のとき、

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left|a_k \omega^k\right| \le A_0 \frac{\omega^4}{n^2}, \quad A_0 := \frac{1}{1-A}$$

が成立することを示せ。

4) 以上の結果を用いて、$\Phi_Z(\omega) := \lim_{n\to\infty} \Phi_{Z_n}(\omega)$ を求め、$f_Z(z)$ が式 (1.1) で与えられることを示せ。

2. 集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の置換 σ に対して、$n \times n$ 行列 $A_\sigma = (a_{ij})$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1 \quad (j = \sigma(i) \text{ のとき}) \\ a_{ij} &= 0 \quad (j \neq \sigma(i) \text{ のとき}) \end{aligned}$$

1) 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の置換 σ_1, σ_2 を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma_1(1) & \sigma_1(2) & \sigma_1(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma_2(1) & \sigma_2(2) & \sigma_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。これらに対応する 3×3 行列 $A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}$ を書け。

2) 行列式 $\det(A_{\sigma_1}), \det(A_{\sigma_2})$ の値を求めよ。

3) 集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の任意の置換 σ に対して、行列 A_σ は以下を満すことを証明せよ。

$$\det((A_\sigma)^2) = 1$$

4) 以下の $n \times n$ 行列の集合は行列の積に関して群をなすことを証明せよ。

$$\{A_\sigma \mid \sigma \text{は} \{1, \ldots, n\} \text{ 上の置換}\}$$

3.

1) 以下の設問に答えよ。

   a) 非終端記号の集合 $N = \{S\}$、終端記号の集合 $\Sigma = \{0, 1\}$、生成規則の集合 $P_1 = \{S \to \epsilon, S \to 0S0, S \to 1S1\}$、開始記号 S をもつ文脈自由文法 $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ が生成する文の性質を述べよ。また、それを帰納法により証明せよ。

   b) 終端記号の集合を $\Sigma = \{0, 1\}$ とするとき、長さが奇数のすべての文を生成し、長さが偶数の文は生成しない文法 G_2 を求めよ。

   c) a) の文法 G_1 が生成する言語 $L(G_1)$ の補集合 $L(G_3) = \{0, 1\}^* - L(G_1)$ を生成する文法 G_3 を求めよ。b) の結果を参考にせよ。

2) アルファベット {0,1} 上の次の言語を受理する決定性有限オートマトン (DFA) を図示せよ。

   a) 末尾が 01 の文字列の全体。

   b) 1 で始まる文字列のうち、正の 2 進数としてみたときに、偶数である文字列の全体。

   c) 1 で始まる文字列のうち、正の 2 進数としてみたときに、3 の剰余が 1 となる文字列の全体。

4. $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ の n 人で、席替えを行うことを考える。ただし $n \geq 2$ とする。席には順に 1 から n の番号がついているとする。また、席替え前には席 i に P_i がいるとする $(1 \leq i \leq n)$。

1) 番号が連続する 2 つの席 i と $i+1$ を選び、その席の 2 人で席を交換する、という互換を有限回繰り返すことにより、席替えを行うことにする $(1 \leq i \leq n-1)$。次に例を示す。

[例] $n = 4$ とする。互換する席を (席 2 と席 3)、(席 3 と席 4)、(席 1 と席 2)、(席 3 と席 4)、最後に (席 2 と席 3) と順に選ぶ。このとき 4 人の並び順は (P_1, P_2, P_3, P_4) から $(P_1, P_3, P_2, P_4), (P_1, P_3, P_4, P_2), (P_3, P_1, P_4, P_2), (P_3, P_1, P_2, P_4)$ と変わっていき、最終的に (P_3, P_2, P_1, P_4) となる。

以下の設問に答えよ。

a) n 人の席替えにおいて、互換する席を次の順に選んだとする。

(席 1 と席 2)、(席 2 と席 3)、$\cdots$、(席 $n-2$ と席 $n-1$)、(席 $n-1$ と席 n)

この席替えによって最終的に得られる n 人の並び順を示せ。

b) 席替え後の n 人の可能な並び順は $n!$ 通りある。どの並び順も、番号が連続する席の互換を高々 $n(n-1)/2$ 回繰り返すことによって得られることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

2) 1 から n の数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉を入れた箱がある。これを使って席替えを行うことにする。すべての人の席が変わるようにしたいので、次のようにすることにした。まず、P_1 が箱からランダムに玉を 1 つ取り、玉に書かれた番号の席に座ることにする。席が変われば取った玉は箱に戻さない。席が変わらなければ、もう 1 つ別の玉をランダムに取り直しその玉の番号の席に座ることにして、先に取った玉は箱に戻し、後に取った玉は戻さない。

次に P_2 が残りの $n-1$ 個の玉に対して、P_1 と同様の操作を行い、席を決める。以下同様の操作を繰り返す。

P_1, P_2 について、以下の設問に答えよ。

a) P_1 が玉を取り直す確率を求めよ。

b) 席替え後に P_1 が席 i に座る確率を、すべての $i (1 \leq i \leq n)$ について求めよ。

c) P_2 が玉を取り直す確率を求めよ。

d) P_1 が席 $i (\neq 1)$ に座ることになったとする。この条件のもとで席替え後に P_2 が席 1 に座る条件付確率と、席 3 に座る条件付確率をそれぞれ求めよ。

e) P_2 が席 1 に座る確率と、席 3 に座る確率をそれぞれ求めよ。